第 3 节 含参不等式恒成立问题（★★★☆）

强化训练

1．（2023·上海浦东新区模拟·★★）已知关于 x 的不等式 $x-\ln x-a>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

答案：$(-\infty,1)$

解析：观察发现将 a 移至右侧，即可全分离，

由题意，$x-\ln x-a>0$，所以 $a<x-\ln x$ ①，

设 $f(x)=x-\ln x(x>0)$，则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$，

从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上↘，在 $(1,+\infty)$ 上↗，

故 $f(x)_{\min}=f(1)=1$，由①知 $a<f(x)$ 恒成立，所以 $a<1$.

2．（★★★）存在 $x>0$，使得 $\ln x-ax+2>0$，则实数 a 的取值范围为_____.

答案：$(-\infty,\mathrm{e})$

解法 1：所给不等式的 a 能完全分离出来，先尝试全分离，$\ln x-ax+2>0\Leftrightarrow ax<2+\ln x\Leftrightarrow a<\dfrac{2+\ln x}{x}$，

所以问题等价于存在 $x>0$，使得 $a<\dfrac{2+\ln x}{x}$，故只需求右侧的最大值，可构造函数求导分析，

设 $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=-\dfrac{1+\ln x}{x^2}$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}^{-1}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x>\mathrm{e}^{-1}$，

从而 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^{-1})$ 上↗，在 $(\mathrm{e}^{-1},+\infty)$ 上↘，故 $f(x)_{\max}=f(\mathrm{e}^{-1})=\mathrm{e}$，所以 $a<\mathrm{e}$.

解法 2：将 $\ln x-ax+2>0$ 中的 $-ax+2$ 移至右侧，就能作图分析，故也可尝试半分离，

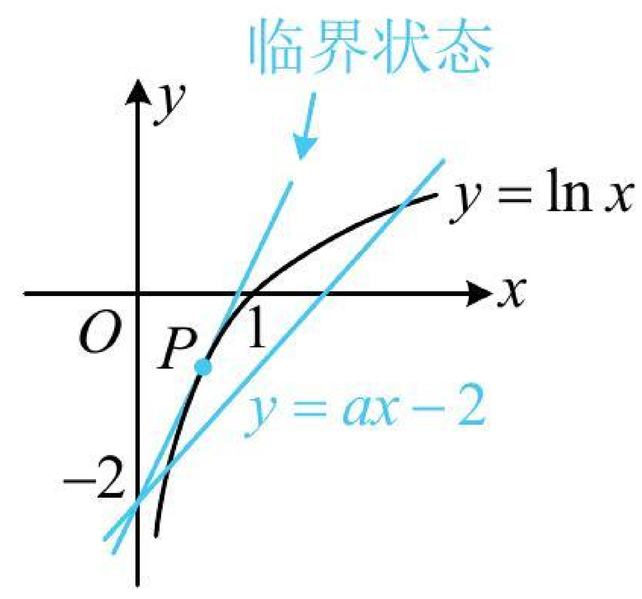
$\ln x-ax+2>0\Leftrightarrow \ln x>ax-2$，如图，临界状态为 $y=ax-2$ 恰与曲线 $y=\ln x$ 相切的情形，先求解此临界状态，直线 $y=ax-2$ 过定点 $(0,-2)$，所以先求出曲线 $y=\ln x$ 过点 $(0,-2)$ 的切线，

设切点为 $P(x_0,\ln x_0)$，因为 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，

将点 $(0,-2)$ 代入可得：$-2-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(0-x_0)$，解得：$x_0=\mathrm{e}^{-1}$，从而切线的斜率为 e，

由图可知，当且仅当 $a<\mathrm{e}$ 时，曲线 $y=\ln x$ 才有位于直线 $y=ax-2$ 上方的部分，

也即存在 $x>0$，使 $\ln x>ax-2$ 成立，所以 $a<\mathrm{e}$.



3.（2023·新高考Ⅱ卷·★★★）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 单调递增，则 a 的最小值为（　　）

（A）e^2　　（B）e　　（C）e^{-1}　　（D）e^{-2}

答案：C

解析：$f(x)$ 的解析式较复杂，不易直接分析单调性，故求导，

由题意，$f'(x)=a\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$，因为 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上↗，所以 $f'(x)\ge 0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，即 $a\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}\ge 0$ ①，

观察发现参数 a 容易全分离，故将其分离出来再看，不等式①等价于 $a\ge\dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}$，令 $g(x)=x\mathrm{e}^x(1<x<2)$，

则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上↗，又 $g(1)=\mathrm{e}$，$g(2)=2\mathrm{e}^2$，所以 $g(x)\in(\mathrm{e},2\mathrm{e}^2)$，

故 $\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}\in(\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2},\dfrac{1}{\mathrm{e}})$，因为 $a\ge\dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，所以 $a\ge\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{-1}$，故 a 的最小值为 e^{-1}.

4.（2022·江西萍乡三模·★★★）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1\ne x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，若存在 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]$，使不等式 $f(x\cos x)\ge f(a-\sin x)$ 成立，则实数 a 的最大值为（　　）

（A）-4　　（B）1　　（C）4　　（D）6

答案：B

解析：由题意，$f(x)$ 在 **R** 上↗，所以 $f(x\cos x)\ge f(a-\sin x)\Leftrightarrow x\cos x\ge a-\sin x$ ①，

不等式①的参数 a 容易分离出来，故尝试全分离，不等式①等价于 $a\le x\cos x+\sin x$，

所以问题等价于存在 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]$，使得 $a\le x\cos x+\sin x$，故 $a\le(x\cos x+\sin x)_{\max}$，

设 $g(x)=x\cos x+\sin x(\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi)$，则 $g'(x)=2\cos x-x\sin x$，因为 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$，所以 $2\cos x\le 0$，$x\sin x\ge 0$，

从而 $g'(x)\le 0$，故 $g(x)$ 在 $[\dfrac{\pi}{2},\pi]$ 上↘，所以 $g(x)_{\max}=g(\dfrac{\pi}{2})=1$，从而 $a\le 1$，故 a 的最大值为 1.

5.（2018·天津卷·★★★）已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2,x\le 0\\-x^2+2x-2a,x>0\end{cases}$，若对任意的 $x\in[-3,+\infty)$，$f(x)\le|x|$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____.

答案：$[\dfrac{1}{8},2]$

解析：$f(x)$ 为分段函数，可分段考虑 $f(x)\le|x|$，参数 a 在常数项上，容易全分离，

当 $-3\le x\le 0$ 时，$f(x)\le|x|\Leftrightarrow x^2+2x+a-2\le -x\Leftrightarrow a\le -x^2-3x+2$，

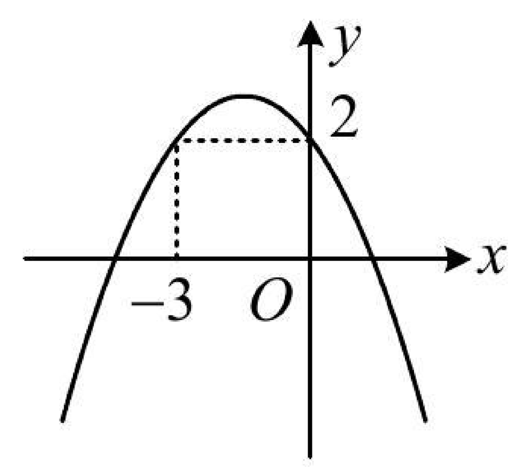
注意到二次函数 $y=-x^2-3x+2$ 的对称轴为 $x=-\dfrac{3}{2}$，如图，

由图可知当 $x=-3$ 或 0 时，$y=-x^2-3x+2$ 取得最小值 2，故 $a\le 2$；

当 $x>0$ 时，$f(x)\le|x|\Leftrightarrow -x^2+2x-2a\le x\Leftrightarrow 2a\ge -x^2+x$，

因为 $-x^2+x=-(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{4}$，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时取等号，所以 $(-x^2+x)_{\max}=\dfrac{1}{4}$，从而 $2a\ge\dfrac{1}{4}$，故 $a\ge\dfrac{1}{8}$；

综上所述，a 的取值范围是 $[\dfrac{1}{8},2]$.



【反思】本题也可用半分离，但图形的运动过程较复杂. 全分离重在“数”，半分离重在“形”，解题时应先尝试预判复杂度，再做出选择，本题显然全分离更简单.

6．（2022 • 天津模拟 • ★★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}e\ln x, x>0\\ e^x, x\le 0\end{cases}$，若不等式 $f(x)\le 2|x-a|$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____.

答案： $[\dfrac{1}{2},\dfrac{e\ln 2}{2}]$

解析： 参数 a 在绝对值里面，不易全分离，考虑直接作图分析，

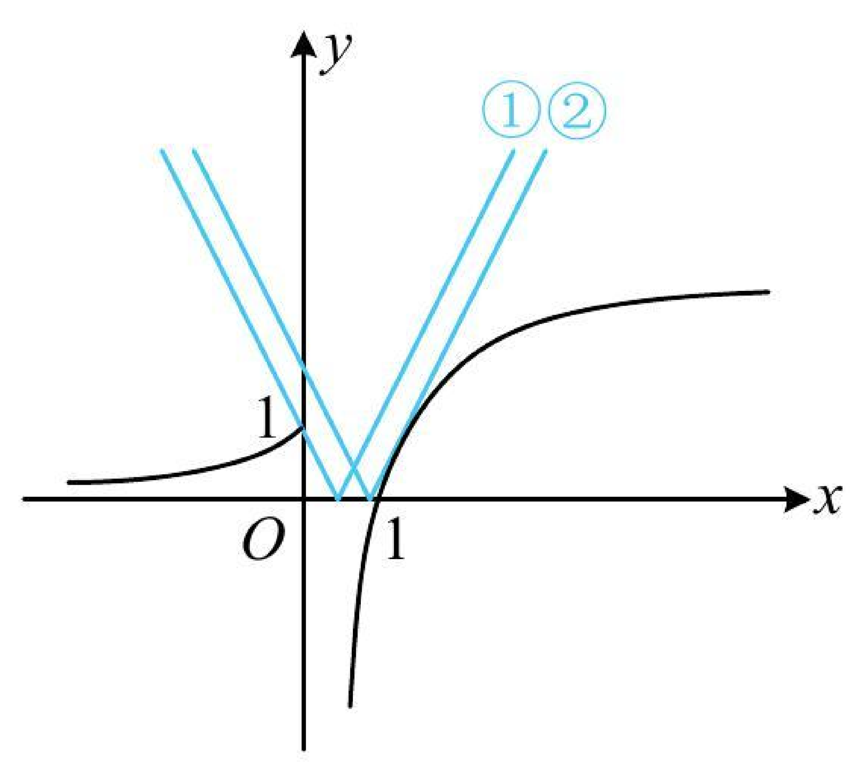
作出 $y=f(x)$ 和 $y=2|x-a|$ 的图象如图，临界状态为图中的①和②，

对于①，折线 $y=2|x-a|$ 左侧部分 $y=2(a-x)$ 过点 $(0,1)$，所以 $1=2(a-0)$，解得：$a=\dfrac{1}{2}$；

对于②，折线 $y=2|x-a|$ 右侧部分 $y=2(x-a)$ 与 $y=e\ln x$ 相切，

因为 $(e\ln x)'=\dfrac{e}{x}$，所以令 $\dfrac{e}{x}=2$ 得：$x=\dfrac{e}{2}$，故切点为 $(\dfrac{e}{2},e\ln\dfrac{e}{2})$，代入 $y=2(x-a)$ 可解得：$a=\dfrac{e\ln 2}{2}$；

由图可知，当且仅当 $\dfrac{1}{2}\le a\le\dfrac{e\ln 2}{2}$ 时，$f(x)\le 2|x-a|$ 恒成立，所以 a 的取值范围为 $[\dfrac{1}{2},\dfrac{e\ln 2}{2}]$.



7.（2022 •江西南昌三模 •★★★★）已知 a 和 x 是正数，若不等式 $x^{\frac{1}{a}}\ge a^{\frac{1}{x}}$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,\frac{1}{e}]$　　（B）$[\frac{1}{e},1)$　　（C）$[\frac{1}{e},1)\cup(1,e)$　　（D）$\{\frac{1}{e}\}$

答案：D

解析：原不等式左右两侧均为指数结构，不易直接全分离或半分离，可以考虑先取对数，再全分离，

由题意，$x^{\frac{1}{a}}\ge a^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow \ln x^{\frac{1}{a}}\ge \ln a^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow \frac{1}{a}\ln x\ge \frac{1}{x}\ln a\Leftrightarrow x\ln x\ge a\ln a$，

此时已经全分离了，而且比较巧妙的是左右两侧恰好同构，可构造函数分析，

设 $f(x)=x\ln x(x>0)$，则 $f'(x)=\ln x+1$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{e}$，

从而 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$，

因为 $x\ln x\ge a\ln a$ 恒成立，所以 $f(x)\ge f(a)$，从而 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的最小值，故 $a=\frac{1}{e}$.

【反思】没做出来？别慌，这里用到了新的技巧. 我们发现不仅可通过移项、同除等方法来分离，对于指数含参不等式，还可考虑两端取对数将参数从指数部分剥离.